

Journée des Doctorants

Caractérisation spectrale de l'uniforme continuité de représentations de groupes

Mathieu Cianfarani

Université de Corse

30 juin 2011

Caractérisation spectrale de l'uniforme continuité de représentations de groupes

- ▶ Qu'est-ce qu'un groupe (topologique) ?
- ▶ Qu'est-ce qu'une représentation de groupe ?

$$\theta : G \rightarrow \mathcal{L}(X)$$

- ▶ Qu'est-ce qu'un spectre ?
- ▶ Qu'est-ce qu'une représentation uniformément continue ?

Si $g \rightarrow e$ alors $\sigma(\theta(g)) \rightarrow \{1\}$.

Question

Que dire du spectre des images du groupe par la représentation dans le cas où elle n'est pas uniformément continue ?

Caractérisation spectrale de l'uniforme continuité de représentations de groupes

- ▶ Qu'est-ce qu'un groupe (topologique) ?
- ▶ Qu'est-ce qu'une représentation de groupe ?

$$\theta : G \rightarrow \mathcal{L}(X)$$

- ▶ Qu'est-ce qu'un spectre ?
- ▶ Qu'est-ce qu'une représentation uniformément continue ?

Si $g \rightarrow e$ alors $\sigma(\theta(g)) \rightarrow \{1\}$.

Question

Que dire du spectre des images du groupe par la représentation dans le cas où elle n'est pas uniformément continue ?

Caractérisation spectrale de l'uniforme continuité de représentations de groupes

- ▶ Qu'est-ce qu'un groupe (topologique) ?
- ▶ Qu'est-ce qu'une représentation de groupe ?

$$\theta : G \rightarrow \mathcal{L}(X)$$

- ▶ Qu'est-ce qu'un spectre ?
- ▶ Qu'est-ce qu'une représentation uniformément continue ?

Si $g \rightarrow e$ alors $\sigma(\theta(g)) \rightarrow \{1\}$.

Question

Que dire du spectre des images du groupe par la représentation dans le cas où elle n'est pas uniformément continue ?

Caractérisation spectrale de l'uniforme continuité de représentations de groupes

- ▶ Qu'est-ce qu'un groupe (topologique) ?
- ▶ Qu'est-ce qu'une représentation de groupe ?

$$\theta : G \rightarrow \mathcal{L}(X)$$

- ▶ Qu'est-ce qu'un spectre ?
- ▶ Qu'est-ce qu'une représentation uniformément continue ?

Si $g \rightarrow e$ alors $\sigma(\theta(g)) \rightarrow \{1\}$.

Question

Que dire du spectre des images du groupe par la représentation dans le cas où elle n'est pas uniformément continue ?

Caractérisation spectrale de l'uniforme continuité de représentations de groupes

- ▶ Qu'est-ce qu'un groupe (topologique) ?
- ▶ Qu'est-ce qu'une représentation de groupe ?

$$\theta : G \rightarrow \mathcal{L}(X)$$

- ▶ Qu'est-ce qu'un spectre ?
- ▶ Qu'est-ce qu'une représentation uniformément continue ?

Si $g \rightarrow e$ alors $\sigma(\theta(g)) \rightarrow \{1\}$.

Question

Que dire du spectre des images du groupe par la représentation dans le cas où elle n'est pas uniformément continue ?

Caractérisation spectrale de l'uniforme continuité de représentations de groupes

- ▶ Qu'est-ce qu'un groupe (topologique) ?
- ▶ Qu'est-ce qu'une représentation de groupe ?

$$\theta : G \rightarrow \mathcal{L}(X)$$

- ▶ Qu'est-ce qu'un spectre ?
- ▶ Qu'est-ce qu'une représentation uniformément continue ?

Si $g \rightarrow e$ alors $\sigma(\theta(g)) \rightarrow \{1\}$.

Question

Que dire du spectre des images du groupe par la représentation dans le cas où elle n'est pas uniformément continue ?

Caractérisation spectrale de l'uniforme continuité de représentations de groupes

- ▶ Qu'est-ce qu'un groupe (topologique) ?
- ▶ Qu'est-ce qu'une représentation de groupe ?

$$\theta : G \rightarrow \mathcal{L}(X)$$

- ▶ Qu'est-ce qu'un spectre ?
- ▶ Qu'est-ce qu'une représentation uniformément continue ?

Si $g \rightarrow e$ alors $\sigma(\theta(g)) \rightarrow \{1\}$.

Question

Que dire du spectre des images du groupe par la représentation dans le cas où elle n'est pas uniformément continue ?

Caractérisation spectrale de l'uniforme continuité de représentations de groupes

- ▶ Qu'est-ce qu'un groupe (topologique) ?
- ▶ Qu'est-ce qu'une représentation de groupe ?

$$\theta : G \rightarrow \mathcal{L}(X)$$

- ▶ Qu'est-ce qu'un spectre ?
- ▶ Qu'est-ce qu'une représentation uniformément continue ?

Si $g \rightarrow e$ alors $\sigma(\theta(g)) \rightarrow \{1\}$.

Question

Que dire du spectre des images du groupe par la représentation dans le cas où elle n'est pas uniformément continue ?

Résultat déjà connu : le cas où $G = \mathbb{R}$

Théorème (K. Latrach, J.M. Paoli et P. Simonnet)

Soit $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(X)$ une représentation fortement continue de \mathbb{R} dans un espace de Banach X .

On pose $\Sigma := \{t \in \mathbb{R} \mid \sigma^1(\theta(t)) = \mathbb{T}\}$ où $\sigma^1(T) = \{\frac{\lambda}{|\lambda|} \mid \lambda \in \sigma(T)\}$.

Alors :

θ n'est pas uniformément continue $\Leftrightarrow \Sigma$ est comeagre.

Et pour d'autres groupes ?

Exemple

Prenons $X = \ell^2$, $G = \Gamma_m^{\mathbb{N}}$ où Γ_m est le groupe des racines $m^{\text{ième}}$ de l'unité et $\theta(\epsilon_n) : (u_n) \mapsto (\epsilon_n u_n)$. On a alors pour tout $g \in G$, $\sigma(\theta(g)) \subset \Gamma_m$.

Résultat déjà connu : le cas où $G = \mathbb{R}$

Théorème (K. Latrach, J.M. Paoli et P. Simonnet)

Soit $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(X)$ une représentation fortement continue de \mathbb{R} dans un espace de Banach X .

On pose $\Sigma := \{t \in \mathbb{R} \mid \sigma^1(\theta(t)) = \mathbb{T}\}$ où $\sigma^1(T) = \{\frac{\lambda}{|\lambda|} \mid \lambda \in \sigma(T)\}$.

Alors :

θ n'est pas uniformément continue $\Leftrightarrow \Sigma$ est comeagre.

Et pour d'autres groupes ?

Exemple

Prenons $X = \ell^2$, $G = \Gamma_m^{\mathbb{N}}$ où Γ_m est le groupe des racines m^{ieme} de l'unité et $\theta(\epsilon_n) : (u_n) \mapsto (\epsilon_n u_n)$. On a alors pour tout $g \in G$, $\sigma(\theta(g)) \subset \Gamma_m$.

Résultat déjà connu : le cas où $G = \mathbb{R}$

Théorème (K. Latrach, J.M. Paoli et P. Simonnet)

Soit $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(X)$ une représentation fortement continue de \mathbb{R} dans un espace de Banach X .

On pose $\Sigma := \{t \in \mathbb{R} \mid \sigma^1(\theta(t)) = \mathbb{T}\}$ où $\sigma^1(T) = \{\frac{\lambda}{|\lambda|} \mid \lambda \in \sigma(T)\}$.

Alors :

θ n'est pas uniformément continue $\Leftrightarrow \Sigma$ est comeagre.

Et pour d'autres groupes ?

Exemple

Prenons $X = \ell^2$, $G = \Gamma_m^{\mathbb{N}}$ où Γ_m est le groupe des racines m^{ieme} de l'unité et $\theta(\epsilon_n) : (u_n) \mapsto (\epsilon_n u_n)$. On a alors pour tout $g \in G$, $\sigma(\theta(g)) \subset \Gamma_m$.

Résultat déjà connu : le cas où $G = \mathbb{R}$

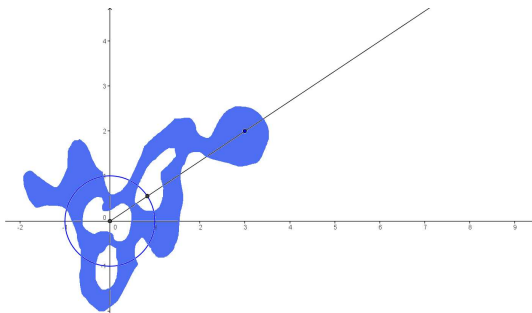
Théorème (K. Latrach, J.M. Paoli et P. Simonnet)

Soit $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(X)$ une représentation fortement continue de \mathbb{R} dans un espace de Banach X .

On pose $\Sigma := \{t \in \mathbb{R} \mid \sigma^1(\theta(t)) = \mathbb{T}\}$ où $\sigma^1(T) = \{\frac{\lambda}{|\lambda|} \mid \lambda \in \sigma(T)\}$.

Alors :

θ n'est pas uniformément continue $\Leftrightarrow \Sigma$ est coaigre.



Et pour d'autres groupes ?

Exemple

Prenons $X = \ell^2$, $G = \Gamma_m^{\mathbb{N}}$ où Γ_m est le groupe des racines $m^{\text{ième}}$ de l'unité et

$\theta(\epsilon_n) : (u_n) \mapsto (\epsilon_n u_n)$. On a alors pour tout $g \in G$, $\sigma(\theta(g)) \subset \Gamma_m$.

Résultat déjà connu : le cas où $G = \mathbb{R}$

Théorème (K. Latrach, J.M. Paoli et P. Simonnet)

Soit $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(X)$ une représentation fortement continue de \mathbb{R} dans un espace de Banach X .

On pose $\Sigma := \{t \in \mathbb{R} \mid \sigma^1(\theta(t)) = \mathbb{T}\}$ où $\sigma^1(T) = \{\frac{\lambda}{|\lambda|} \mid \lambda \in \sigma(T)\}$.

Alors :

θ n'est pas uniformément continue $\Leftrightarrow \Sigma$ est comeagre.

Et pour d'autres groupes ?

Exemple

Prenons $X = \ell^2$, $G = \Gamma_m^{\mathbb{N}}$ où Γ_m est le groupe des racines m^{ieme} de l'unité et $\theta(\epsilon_n) : (u_n) \mapsto (\epsilon_n u_n)$. On a alors pour tout $g \in G$, $\sigma(\theta(g)) \subset \Gamma_m$.

Résultat déjà connu : le cas où $G = \mathbb{R}$

Théorème (K. Latrach, J.M. Paoli et P. Simonnet)

Soit $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(X)$ une représentation fortement continue de \mathbb{R} dans un espace de Banach X .

On pose $\Sigma := \{t \in \mathbb{R} \mid \sigma^1(\theta(t)) = \mathbb{T}\}$ où $\sigma^1(T) = \{\frac{\lambda}{|\lambda|} \mid \lambda \in \sigma(T)\}$.

Alors :

θ n'est pas uniformément continue $\Leftrightarrow \Sigma$ est comeagre.

Et pour d'autres groupes ?

Exemple

Prenons $X = \ell^2$, $G = \Gamma_m^{\mathbb{N}}$ où Γ_m est le groupe des racines $m^{\text{ième}}$ de l'unité et $\theta(\epsilon_n) : (u_n) \mapsto (\epsilon_n u_n)$. On a alors pour tout $g \in G$, $\sigma(\theta(g)) \subset \Gamma_m$.

Théorème dans le cas où G est commutatif

Théorème

Soient G un groupe commutatif, localement compact et à base dénombrable de voisinage et $\theta : G \rightarrow \mathcal{L}(X)$ une représentation fortement continue de G dans un espace de Banach X .

On pose $\Sigma := \{g \in G \mid \sigma^1(\theta(g)) \text{ contient un polygone régulier}\}$.

Alors :

θ n'est pas uniformément continue $\Leftrightarrow \Sigma$ est comeagre.

Théorème dans le cas où G est commutatif

Théorème

Soient G un groupe commutatif, localement compact et à base dénombrable de voisinage et $\theta : G \rightarrow \mathcal{L}(X)$ une représentation fortement continue de G dans un espace de Banach X .

On pose $\Sigma := \{g \in G \mid \sigma^1(\theta(g)) \text{ contient un polygone régulier}\}$.

Alors :

θ n'est pas uniformément continue $\Leftrightarrow \Sigma$ est comeagre.

Théorème dans le cas où G est commutatif

Théorème

Soient G un groupe commutatif, localement compact et à base dénombrable de voisinage et $\theta : G \rightarrow \mathcal{L}(X)$ une représentation fortement continue de G dans un espace de Banach X .

On pose $\Sigma := \{g \in G \mid \sigma^1(\theta(g)) \text{ contient un polygone régulier}\}$.

Alors :

θ n'est pas uniformément continue $\Leftrightarrow \Sigma$ est comeagre.

Théorème dans le cas où G est commutatif

Théorème

Soient G un groupe commutatif, localement compact et à base dénombrable de voisinage et $\theta : G \rightarrow \mathcal{L}(X)$ une représentation fortement continue de G dans un espace de Banach X .

On pose $\Sigma := \{g \in G \mid \sigma^1(\theta(g)) \text{ contient un polygone régulier}\}$.

Alors :

θ n'est pas uniformément continue $\Leftrightarrow \Sigma$ est comeagre.

Théorème dans le cas où G est commutatif

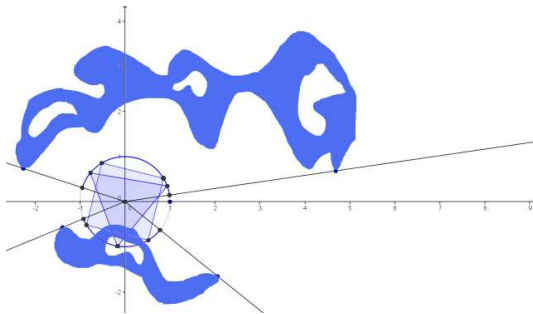
Théorème

Soient G un groupe commutatif, localement compact et à base dénombrable de voisinage et $\theta : G \rightarrow \mathcal{L}(X)$ une représentation fortement continue de G dans un espace de Banach X .

On pose $\Sigma := \{g \in G \mid \sigma^1(\theta(g)) \text{ contient un polygone régulier}\}$.

Alors :

θ n'est pas uniformément continue $\Leftrightarrow \Sigma$ est comeagre.



Théorème dans le cas où G n'est pas commutatif

Théorème

Soient G un groupe localement compact et à base dénombrable de voisinage et $\theta : G \rightarrow \mathcal{U}(H)$ une représentation unitaire fortement continue de G dans un espace de Hilbert H .

On pose $\Sigma := \{g \in G \mid 0 \in \text{Conv}(\sigma(\theta(g)))\}$.

Alors :

θ n'est pas uniformément continue $\Leftrightarrow \Sigma$ est comeagre.

Théorème dans le cas où G n'est pas commutatif

Théorème

Soient G un groupe localement compact et à base dénombrable de voisinage et $\theta : G \rightarrow \mathcal{U}(H)$ une représentation *unitaire* fortement continue de G dans *un espace de Hilbert H* .

On pose $\Sigma := \{g \in G \mid 0 \in \text{Conv}(\sigma(\theta(g)))\}$.

Alors :

θ n'est pas uniformément continue $\Leftrightarrow \Sigma$ est coaigre.

Théorème dans le cas où G n'est pas commutatif

Théorème

Soient G un groupe localement compact et à base dénombrable de voisinage et $\theta : G \rightarrow \mathcal{U}(H)$ une représentation unitaire fortement continue de G dans un espace de Hilbert H .

On pose $\Sigma := \{g \in G \mid 0 \in \text{Conv}(\sigma(\theta(g)))\}$.

Alors :

θ n'est pas uniformément continue $\Leftrightarrow \Sigma$ est coaigre.

Théorème dans le cas où G n'est pas commutatif

Théorème

Soient G un groupe localement compact et à base dénombrable de voisinage et $\theta : G \rightarrow \mathcal{U}(H)$ une représentation unitaire fortement continue de G dans un espace de Hilbert H .

On pose $\Sigma := \{g \in G \mid 0 \in \text{Conv}(\sigma(\theta(g)))\}$.

Alors :

θ n'est pas uniformément continue $\Leftrightarrow \Sigma$ est coaigre.

Le cas des groupes de Lie

Théorème

Soient G un groupe de Lie et $\theta : G \rightarrow \mathcal{U}(H)$ une représentation unitaire fortement continue de G dans un espace de Hilbert H .

On pose $\Sigma := \{g \in G \mid \sigma(\theta(g)) = \mathbb{T}\}$.

Alors :

θ n'est pas uniformément continue



il existe U voisinage ouvert de e dans G tel que $\Sigma \cap U$ est comeagre.

Le cas des groupes de Lie

Théorème

Soient G un groupe de Lie et $\theta : G \rightarrow \mathcal{U}(H)$ une représentation unitaire fortement continue de G dans un espace de Hilbert H .

On pose $\Sigma := \{g \in G \mid \sigma(\theta(g)) = \mathbb{T}\}$.

Alors :

θ n'est pas uniformément continue



il existe U voisinage ouvert de e dans G tel que $\Sigma \cap U$ est comeagre.

Le cas des groupes de Lie

Théorème

Soient G un groupe de Lie et $\theta : G \rightarrow \mathcal{U}(H)$ une représentation unitaire fortement continue de G dans un espace de Hilbert H .

On pose $\Sigma := \{g \in G \mid \sigma(\theta(g)) = \mathbb{T}\}$.

Alors :

θ n'est pas uniformément continue



il existe U voisinage ouvert de e dans G tel que $\Sigma \cap U$ est comaigne.

Questions en suspens

1. A-t-on des résultats similaires pour les représentations non unitaires?
2. Que dire du spectre de l'image des éléments en dehors de Σ ?

Questions en suspens

1. A-t-on des résultats similaires pour les représentations **non unitaires** ?
2. Que dire du spectre de l'image des éléments en dehors de Σ ?

Questions en suspens

1. A-t-on des résultats similaires pour les représentations non unitaires ?
2. Que dire du spectre de l'image des éléments en dehors de Σ ?