UNIVERSITE DE CORSE-PASCAL PAOLI
ECOLE DOCTORALE ENVIRONNEMENT ET SOCIETE
UMR CNRS 6134 (SPE)

Thèse présentée pour l'obtention du grade de

DOCTEUR EN MATHEMATIQUES
Mention : Mathématiques Appliquées

Soutenue publiquement par

MERIEM IMECHRANE

le 12 juillet 2012

Applications harmoniques : singularités apparentes, lemme de Schwarz-Yau et grand théorème de Picard

---

Directeurs :

Mr Bernard Di Martino, Dr-HDR, Université de Corse
Mme Catherine Ducourtioux, Dr, Université de Corse

Rapporteurs :

Mr Thierry Coulhon, Professeur, Université de Cergy Pontoise
Mr Jean Picard, Professeur, Université Blaise Pascal

Jury

Mr Patrick Bernard, Professeur, Université de Paris Dauphine
Mr Thierry Coulhon, Professeur, Université de Cergy Pontoise
Mr Bernard Di Martino, Dr-HDR, Université de Corse
Mme Catherine Ducourtioux, Dr, Université de Corse
Mr Jean-Martin Paoli, Dr-HDR, Université de Corse
Mr Jean Picard, Professeur, Université Blaise Pascal

Abstract : *Harmonic Maps: Removable Singularities, Schwarz-Yau Lemma and Big Picard Theorem*

The first aim of this work is to provide ”real” proofs of the Big Picard Theorem and of a related theorem of Myung Kwack. By ”real” we mean: without using complex analysis, especially that part relying on the Cauchy Theorem. This program is easily carried out with the help of a theorem of J.Sacks and K.Uhlenbeck and a huge generalization of the Schwarz-Pick Lemma of classical function theory, namely the Schwarz-Yau Lemma. The main result so achieved is the following real version of Kwack’s theorem.
Theorem:
Every harmonic map with bounded generalized dilatation from the punctured disc $D^*= \{0 < |z| < 1\}$ of C into a compact negatively curved Riemannian manifold N extends to a harmonic map from the disc
$D = \{|z| < 1\}$ into N.
Owing to the difficulty of the two theorems referred to above, a large part of this work is devoted to a self-contained account of them. Recall that the theorem of Sacks-Uhlenbeck asserts that an apparent isolated singularity of a harmonic map with finite energy from a surface into a compact Riemannian manifold is removable. Once the geometrical background settled, a more natural variant of their proof is given. Furthermore it is shown that the deep theorem of F.Hélein about the regularity of weakly harmonic maps from a surface into a compact Riemannian manifold allows one to replace the isolated singularity by any sufficiently small compact. For the sake of completeness, we have preceded a revised proof of Hélein’s result filling some gaps in the original one, by a rather lengthy account of the analysis involved in regularity theory.
The Schwarz-Yau Lemma states that for any harmonic map f from M to N with generalized K-bounded dilatation from a complete Riemannian manifold whose Ricci curvature is bounded from below by a non positive constant $-\alpha$ into another one whose sectional curvatures are bounded above by a negative constant $-\beta$, one has $f^*(ds^2\_N) \leq \alpha K^2 / \beta \; ds^2\_M$.
An ”elementary” probabilistic proof of this result is given. It relies only on the Itô calculus and by this way is truly different from the one given by M.Arnaudon and A.Thalmaier.
A twofold addendum is devoted to a power series proof in the Weierstrass’s spirit of the classical Schwarz-Pick Lemma and to the origin of the basic but somewhat confusing concept of connection.

Résumé :

Le premier but de ce travail est de donner des preuves ”réelles” du grand théorème de Picard et d’un théorème voisin de Myung Kwack. Par ”réelles” nous voulons dire n’utilisant pas d’analyse complexe, particulièrement la partie qui repose sur le théorème de Cauchy. Ce programme est facilement mené à bien à l’aide d’un théorème de J.Sacks et K.Uhlenbeck et d’une large généralisation du lemme de Schwarz-Pick de la théorie des fonctions classique, à savoir le lemme de Schwarz-Yau.
Le principal résultat obtenu ainsi est la version réelle suivante du théorème de Kwack.
Théorème:
Toute application harmonique à dilatation généralisée bornée du disque pointé $D^* = \{0 < |z| < 1\}$ de C dans une variété riemannienne compacte à courbure strictement négative se prolonge en une application harmonique du disque D dans N.
En raison de la difficulté des deux théorèmes cités plus haut, une grande partie de ce travail est consacrée à en donner un exposé complet. On rappelle que le théorème de Sacks-Uhlenbeck affirme qu’une singularité isolée d’une application harmonique d’´énergie finie d’une surface dans une variété riemannienne compacte est en fait un point régulier. Une fois le cadre géométrique installé, une variante plus naturelle de leur preuve est donnée. En outre on montre que le profond théorème de F. Hélein sur la régularité des applications faiblement harmoniques d’une surface dans une variété riemannienne compacte permet de remplacer la singularité isolée par un compact quelconque suffisamment petit. Pour être complet, on fait précéder une démonstration remaniée du résultat de F.Hélein, comblant quelques lacunes de la preuve originale, par un assez long exposé de l’analyse intervenant en théorie de la régularité. Le lemme de Schwarz-Yau stipule que pour toute application harmonique f de M dans N à dilatation généralisée bornée par K d’une variété riemannienne complète à courbure de Ricci minorée par une constante $-\alpha$ dans une variété riemannienne à courbures sectionnelles majorées par une constante $-\beta< 0$ on a $f^*(ds^2\_N) \leq \alpha K^2 / \beta \; ds^2\_M$.
Une preuve probabiliste ”élémentaire” de ce résultat est donnée. Elle repose uniquement sur le calcul de Itô et par là diffère vraiment de celle de M. Arnaudon et A. Thalmaier.
Un appendice est consacré à une preuve par les séries entières, dans l’esprit de Weierstrass, du lemme de Schwarz-Pick classique et à l’origine du concept fondamental mais quelque peu déroutant de connexion.