UNIVERSITE DE CORSE-PASCAL PAOLI

ECOLE DOCTORALE ENVIRONNEMENT ET SOCIETE

UMR CNRS 6134 (SPE)

Thèse présentée pour l'obtention du grade de

DOCTEUR EN MATHEMATIQUES

Mention : mathématiques appliquées

Soutenue publiquement par

Jean-Christophe Tomasi

le 12 décembre 2011

Continuité des représentations de groupes topologiques

Directeur :

M Jean-Martin Paoli, Dr-HDR, Université de Corse

Rapporteurs :

M Jean Esterle, Professeur, Université de Bordeaux 1

M Gilles Godefroy, Professeur, Université de Paris 6

Jury

M Catalin Badea, Professeur, Université de Lille 1

M Bernard Di Martino, Dr-HDR, Université de Corse

M Jean Esterle, Professeur, Université de Bordeaux 1

M Gilles Godefroy, Professeur, Université de Paris 6

M Mostafa Mbekhta, Professeur, Université de Lille 1

M Jean-Martin Paoli, Dr-HDR, Université de Corse

M Pierre Simonnet, Dr-HDR, Université de Corse

Résumé :

Soit L(X) l'algèbre des opérateurs bornés sur un espace de Banach X et soit
θ:G→L(X) une représentation fortement continue d'un groupe topologique G dans X.
Pour chaque élément g dans le groupe G, on considère la projection sur le cercle unité $\mathbb{T}$ du spectre $\sigma(\theta(g))$ de l'opérateur inversible $\theta(g)$, on note donc $\sigma^1(\theta(g)):=\{\lambda/|\lambda|,\ \lambda\in\sigma(\theta(g))\}$, et on considère l'ensemble $\boldsymbol{\Sigma}$ de tous les éléments g du groupe G tels que $\sigma^1(\theta(g))$ ne contienne aucun polygone régulier, on note donc $\boldsymbol{\Sigma}:=\{g\in G\ /\ \nexists\ P\in\boldsymbol{\mathcal{P}}\ /\ P \subseteq \sigma^1(\theta(g))\}$, où $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ désigne l'ensemble des polygones réguliers de $\mathbb{T}$ (nous appelons *polygone régulier* de $\mathbb{T}$ l'image par une rotation d'un sous-groupe fermé de $\mathbb{T}$ autre que {1}).
Dans la première partie, nous présentons les principaux résultats et notations utilisés par la suite.
Lorsque G est un groupe abélien localement compact, nous prouvons dans la deuxième partie que θ est uniformément continue si et seulement si θ est mesurable (L(X) est muni de la topologie de la norme) et si de plus G est à base de topologie dénombrable et θ fortement continue, nous montrons dans la troisième partie que θ est uniformément continue si et seulement si $\boldsymbol{\Sigma}$ n'est pas maigre.
De même, nous montrons que θ est uniformément continue si et seulement si $\boldsymbol{\Sigma}$ n'est pas négligeable pour la mesure de Haar sur G.
Lorsque G est un groupe localement compact et θ une représentation unitaire de G dans un espace de Hilbert H, nous montrons également dans la deuxième partie que θ est uniformément continue si et seulement si θ est mesurable, et si de plus G est métrisable et θ fortement continue, nous prouvons dans la troisième partie que θ est uniformément continue si et seulement si $\{g\in G\ /\ 0\notin \mathrm{Conv}(\sigma(\theta(g)))\}$ n'est pas maigre, où Conv(S) désigne l'enveloppe convexe d'une partie quelconque S dans un espace vectoriel.

Mots-clefs : représentation de groupe, algèbre de Banach, espace de Hilbert, continuité, mesurabilité, spectre.

Abstract :

Let L(X) be the algebra of all bounded operators on a Banach space X, and let
θ:G→L(X) be a representation of a topological group G in X.
For every element g in the group G, we consider the projection on the unit circle $\mathbb{T}$ of the spectrum $\sigma(\theta(g))$ of the invertible operator $\theta(g)$, so we set $\sigma^1(\theta(g)):=\{\lambda/|\lambda|,\ \lambda\in\sigma(\theta(g))\}$, and we consider the set $\boldsymbol{\Sigma}$ of all elements g in the group G such that $\sigma^1(\theta(g))$ does not contain any regular polygon of $\mathbb{T}$, so we set $\boldsymbol{\Sigma}:=\{g\in G\ /\ \nexists\ P\in\boldsymbol{\mathcal{P}}\ /\ P \subseteq \sigma^1(\theta(g))\}$, where $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ denotes the set of regular polygons of $\mathbb{T}$ (we call *regular polygon* in $\mathbb{T}$ the image by a rotation of a closed subgroup of $\mathbb{T}$ different from {1}).
In the first part, we set out the principal results and notations subsequently used.
When G is a locally compact abelian group, we prove in the second part that θ is uniformly continuous if and only if θ is measurable (L(X) is equipped with the norm topology) and if more G is second countable and θ strongly continuous, we state in the third part that θ is uniformly continuous if and only if $\boldsymbol{\Sigma}$ is non meager.
In the same way, we show that θ is uniformly continuous if and only if $\boldsymbol{\Sigma}$ is a non null set for the Haar measure on G.
When G is a locally compact group and θ a unitary representation of G in a Hilbert space H, we show also in the second part that θ is uniformly continuous if and only if θ is measurable, and if more G is metrizable and θ strongly continuous, we prove in the third part that θ is uniformly continuous if and only if $\{g\in G\ /\ 0\notin \mathrm{Conv}(\sigma(\theta(g)))\}$ is non meager, where Conv(S) denotes the convex hull of any subset S in a vector space.

Keywords : representation of group, Banach algebra, Hilbert space, continuity, measurability, spectrum.